Name: **Vorname:**

Leginummer:

Mathematik-Teil der Prüfung Mathematik III im Herbst 2007
Vorlesung *Mathematik III mit Systemanalyse* von Dr. P. Thurnheer.

Vorgesehene Zeit: 40 Minuten
Maximale Punktzahl: 15 Punkte
Hilfsmittel: Schriftliche Unterlagen, kein Taschenrechner, kein Mobiltelephon

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
Total		

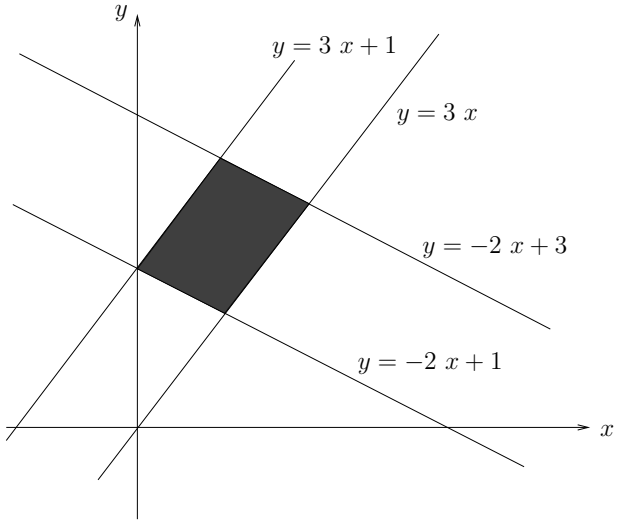
Bitte wenden!

1. **a)** Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2y \\ \frac{z}{y} \\ \ln(y) \end{pmatrix}$$

entlang des Kreises $K = \{(x,y,z) \mid x^2 + (y-5)^2 = 9;\ z = 1\}$ (wählen Sie selbst einen Umlaufsinn).

b) Berechnen Sie die Fläche des untenstehend skizzierten Parallelogramms mit Hilfe eines Doppelintegrals, indem Sie die neuen Koordinaten $u = y + 2x,\ v = y - 3x$ einführen.



c) Führen Sie die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx}(x,t) + u_x(x,t) - \frac{1}{\ln(t)}\, u_t(x,t) = 0$$

durch einen Separationsansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zurück.
Die Differentialgleichung für $X(x)$ führt schliesslich auf ein lineares 2×2 Differentialgleichungssystem. Von welcher Form ist die entsprechende Koeffizientenmatrix? (Sie brauchen das System nicht fertig zu lösen).
Geben Sie die allgemeine Lösung für $T(t)$ an. Tipp: Partielle Integration mit $\ln(t) = 1 \cdot \ln(t)$.

(10 Punkte)

2. Wir betrachten ein allgemeines Vektorfeld $F \subseteq \mathbb{R}^3$, eine geschlossene Kurve $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ und zwei Flächen $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ je mit Randkurve γ, so dass also $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ zusammen die Oberfläche eines Körpers $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^3$ bilden. Die Flächennormalen n_1, n_2 sollen ins Äussere von $\mathcal{K}$ zeigen.

a) Begründen Sie, weshalb die Flüsse des Vektorfeldes rot F in Richtung der Flächennormalen n_1 respektive n_2 durch $\mathcal{F}_1$ respektive $\mathcal{F}_2$ entgegengesetzt gleich sind. Tipp: Machen Sie sich eine Skizze.

Siehe nächstes Blatt!

b) Aus a) folgt, dass der Gesamtfluss von rot F durch die Oberfläche von $\mathcal{K}$ gleich Null ist. Dies gilt für zwei **beliebige** Flächen $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ mit Randkurve γ. Was ergibt sich daraus für die Divergenz des Vektorfeldes rot F?

c) Beweisen Sie Ihre Aussage unter b) allgemein rein formal durch Nachrechnen und kontrollieren Sie sie anhand des speziellen Vektorfeldes

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(yz) \\ ze^x \\ \ln(z/x) \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)